Ministère de l'Education Nationale
Ministère de l'Agriculture et de la Pêche
BANQUE D'EPREUVES G2E

EPREUVE DE MATHEMATIQUES - SESSION 2001

SUJET PRINCIPAL : deuxième tirage à traiter le 11 mai 2001

Durée : 4 heures - Coefficient : 5

ATTENTION : lire attentivement les remarques de la page 5.

Problème n°1

(14 points)

Dans cette partie, $Oxyz$ désigne un repère orthonormé de l'espace géométrique. On peut traiter la fin de cette partie en admettant le résultat du 1).

1) Montrer que le cône de révolution de sommet $S(1,1,1)$ d'axe (OS) et de demi-angle au sommet d'ouverture $\pi/6$ admet comme équation

$$5(x^2+y^2+z^2)-8(xy+yz+zx)+6(x+y+z)=9\ .$$

2) Déterminer la matrice symétrique A qui permet d'écrire

$$5(x^2+y^2+z^2)-8(xy+yz+zx)$$

sous la forme

$$X^t.A.X$$

où X est le vecteur colonne

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

et X^t la matrice ligne transposée de X.

3) Déterminer les valeurs propres de la matrice A.

4) Déterminer les sous-espaces propres correspondants et donner une base orthonormée de l'espace formée de vecteurs propres de A.

5) Ecrire l'équation du cône dans le nouveau repère ainsi obtenu.

6) Représenter l'allure du cône dans ce repère.

Problème n°2
(36 points)

N. B.: au cours des calculs, on pourra intervertir les ordres de sommation sans justification; on ne se posera aucune question sur la convergence des séries rencontrées. On demande aux candidats de se concentrer en priorité aux questions 1), 2) et 3).

1) **Dans cette question**, on désigne par X une variable aléatoire définie sur l'espace Ω muni de la probabilité $\mathbf{P}$, à valeurs dans l'ensemble $\{1,2\}$, et de loi donnée par

$$\mathbf{P}(X=1)=p$$

où p est compris entre 0 et 1.

Etant donné un nombre entier positif n, on considère n variables aléatoires $X_1,\ldots,X_n$ indépendantes et de même loi que X. Pour ω dans Ω, on désigne par $\xi_n(\omega)$ le nombre de chiffres 1 qui apparaissent dans la suite $X_1(\omega),\ldots,X_n(\omega)$.

a) Montrer que ξ_n suit la loi binomiale de paramètres (n,p) et calculer sa fonction génératrice

$$G_{\xi_n}(x)=\sum_{h=0}^{n}\mathbf{P}(\xi_n=h).x^h$$

pour x réel.

b) Donner, par un calcul direct, la fonction génératrice de la variable aléatoire $\sum_{k=1}^{n}(X_k-1)$ et retrouver ainsi la loi de ξ_n.

c) Posant $\alpha_n(h)=\mathbf{P}(\xi_n=h)$, établir la relation de récurrence

$$\alpha_{n+1}(h)=\alpha_n(h).(1-p)+\alpha_n(h-1).p$$

pour $n\geq 0$ et $h=0,\ldots,n$, avec la convention $\alpha_n(h)=0$ pour $h<0$.

Désormais, on considère une suite infinie $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes de même loi que X et une variable aléatoire ν de loi de Poisson de paramètre λ positif, indépendante des X_n. On pose $\xi_0=0$.

On définit la variable aléatoire α par

$$\alpha(\omega)=\xi_{\nu(\omega)}(\omega)$$

pour ω dans Ω.

d) Montrer que

$$\mathbf{P}(\alpha=h)=\sum_{n\geq h}e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\mathbf{P}(\xi_n=h)$$

pour tout nombre entier naturel h.

e) En déduire que la fonction génératrice de α prend la forme

$$e^{-\lambda} \sum_{n \geq 0} \frac{\lambda^n}{n!} G_{\xi_n}$$

et expliciter cette fonction.

f) Identifier la loi de la variable aléatoire α et calculer son espérance.

Dans la suite du problème, On désigne par X une variable aléatoire à valeurs dans l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ et de loi donnée par

$$\mathbf{P}(X = 1) = p$$
$$\mathbf{P}(X = 2) = q$$

où $p, q \geq 0$ et $p + q \leq 1$.

On considère une suite infinie $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes de même loi que X et une variable aléatoire ν de loi de Poisson de paramètre λ positif, indépendante des X_n.

2) Etant donné un nombre entier naturel n, on désigne par $\xi_n(\omega)$ le nombre de chiffres 1 apparaissant dans la suite $X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)$ et par $\eta_n(\omega)$ le nombre de chiffres 2 apparaissant dans la même suite. On définit de cette manière deux variables aléatoires ξ_n et η_n.

a) Déterminer la loi de ξ_n.

b) Montrer que la loi conjointe du couple $\zeta_n = (\xi_n, \eta_n)$ est donnée par

$$\mathbf{P}(\xi_n = h, \eta_n = k) = \frac{n!}{h!k!(n-h-k)!} p^h q^k (1-p-q)^{n-h-k}$$

pour h, k entiers positifs tels que $h + k \leq n$.

c) Les variables aléatoires ξ_n et η_n sont-elles indépendantes?

3) Montrer que la fonction génératrice du couple ζ_n, définie par

$$G_{\zeta_n}(x, y) = \sum_{h,k \geq 0} \mathbf{P}(\zeta_n = (h, k)).x^h y^k$$

pour x, y réels vaut $(px + qy + 1 - p - q)^n$.

4) On pose $\xi_0 = \eta_0 = 0$ et on considère les variables aléatoires α et β définies par

$$\alpha(\omega) = \xi_{\nu(\omega)}(\omega)$$
$$\beta(\omega) = \eta_{\nu(\omega)}(\omega)$$

pour ω dans Ω.

a) Montrer que la fonction génératrice du couple (α, β), définie comme pour le couple (ξ_n, η_n), est donnée par

$$G_{(\alpha,\beta)}(x, y) = G_\alpha(x).G_\beta(y)$$

où G_α et G_β désignent les fonctions génératrices de α et β.

b) En déduire que α et β sont indépendantes.

Dans la fin de ce problème , on désigne par τ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$, indépendante des variables X_n précédentes et telle que les variables ξ_τ et η_τ, définies par $\xi_\tau(\omega) = \xi_{\tau(\omega)}(\omega)$ et $\eta_\tau(\omega) = \eta_{\tau(\omega)}(\omega)$ pour tout ω dans Ω, soient indépendantes.

5) On considère une fonction ψ continue sur $\mathbf{R}$, non identiquement nulle, et telle que

$$\psi(x + y) = \psi(x).\psi(y)$$

pour tous x, y réels.

a) Montrer que $\psi(0) = 1$.

b) En déduire que $\psi(1) > 0$.

c) Pour $C = \ln \psi(1)$, on pose

$$\theta(x) = \psi(x).e^{-Cx} .$$

Montrer que la fonction θ est constante.

6) Déduire de ce qui précède que τ suit une loi de Poisson.

Remarques :

Lire "problème n°1" pour I, "problème n°2" pour II.

Problème n°1 :

Les candidats ne doivent pas être troublés par la traduction au 1) du I **d'une petite propriété géométrique, d'autant plus qu'il leur est indiqué qu'ils peuvent sauter la question.**

Quelques modifications ont été apportées : repère orthonormé, cône de révolution, notation de la matrice transposée.

On part du principe que le concours doit aussi tester l'esprit d'initiative et refléter l'esprit d'un futur utilisateur des mathématiques. On fait donc grâce aux candidats de quelques justifications théoriques. Par exemple,

- **les candidats sont censés identifier une matrice (1,1)et un scalaire dans le** 2) du I **;**
- **ils sont censés conserver l'origine dans le** 5) du I **: faire autrement serait maladroit mais sera accepté.**

Problème n°2 :

Un oubli relevé a été corrigé, celui de l'indépendance (terme souligné en page 3), indépendance qui n'a pas été répétée dans le 2) du II.

Dans le 3) du II, **les candidats doivent comprendre que l'événement correspondant à : $h + k > n$ est impossible. La formulation donnée a l'avantage de s'étendre à la question suivante.**

On rappelle en 4)a) du II **une définition de la fonction génératrice donnée dans le** 3) du II.

Le 6) du II **est difficile. Cette question ne sera pas comptée si personne ne la traite. D'ailleurs les questions** 4) et 5) **sont déjà assez difficiles. La notation en tiendra évidemment compte (moins de points sur ces questions) et les candidats sont prévenus.**